european social fund in the czech republic
EUROPEAN UNION
MINISTRY OF EDUCATION, YOUTH AND SPORTS
OP Education for Competitivness
INVESTMENTS IN EDUCATION DEVELOPMENT

2º Congreso de Jóvenes Investigadores

Sevilla, 16–20 de septiembre de 2013

Representabilidad de Adams transfinita

Oriol Raventós (Universidad Masáryk, Brno, República Checa)

Trabajo conjunto con Fernando Muro (Universidad de Sevilla)

Supported by the project CZ.1.07/2.3.00/20.0003 of the Operational Programme Education for Competitiveness of the Ministry of Education, Youth and Sports of the Czech Republic.

Teorema [Adams 1971]

$\mathcal{S}^f \subset \mathcal{S}$ la categoría homotópica de espectros finitos.

$$\begin{array}{l} H\colon \{\mathcal{S}^f\}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab} \\ \prod \longmapsto \prod \\ \text{fibración} \longmapsto \text{Suc. exacta larga} \end{array} \quad \Rightarrow \quad H \cong \mathcal{S}(-,X)|_{\mathcal{S}^f}$$

$$\mathcal{S}(-,X)|_{\mathcal{S}^f} \xrightarrow{\eta} \mathcal{S}(-,Y)|_{\mathcal{S}^f} \quad \Rightarrow \quad \eta = \mathcal{S}(-,g)|_{\mathcal{S}^f} \text{ con } X \xrightarrow{g} Y$$

- Representabilidad para teorías de cohomología [Brown 1962]:

$$H\colon \mathcal{S}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab} \ \text{ teoría de cohomología } \Rightarrow H \cong \mathcal{S}(-,X)$$

- Representabilidad para teorías de homología (vía dualidad Spanier–Whitehead):

$$H\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Ab} \ \text{ teoría de homología } \Rightarrow H \cong \mathcal{S}(\mathbb{S}, X \wedge -)$$

- Representabilidad de Brown para el dual [Neeman 1998]:

$$\begin{array}{l} H\colon \mathcal{S} \longrightarrow \mathrm{Ab} \\ \prod \longmapsto \prod \\ \text{fibración} \longmapsto \text{suc. exacta larga} \end{array} \quad \Rightarrow \quad H \cong \mathcal{S}(X,-)$$

$\mathscr{T}$ satisface la α-representabilidad de Adams para objetos AObj_α

$$H\colon \{\mathscr{T}^\alpha\}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Ab} \quad \text{cohomológico}, \qquad \coprod_{<\alpha} \longmapsto \prod \quad \Rightarrow \quad H \cong \mathscr{T}(-,X)|_{\mathscr{T}^\alpha}$$

$\mathscr{T}$ satisface la α-representabilidad de Adams para morfismos AMor_α

$$\mathscr{T}(-,X)|_{\mathscr{T}^\alpha} \xrightarrow{\eta} \mathscr{T}(-,Y)|_{\mathscr{T}^\alpha} \quad \Rightarrow \quad \eta = \mathscr{T}(-,g)|_{\mathscr{T}^\alpha}\ ,\quad X \xrightarrow{g} Y$$

- $\mathscr{T}$ es una categoría triangulada con coproductos (aditiva con una equivalencia $\Sigma\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ y una família de triángulos exactos $X \to Y \to Z \to \Sigma X$).
- $H\colon \mathscr{T}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$ es cohomológico si envía triángulos a sucesiones exactas largas.

$$X \to Y \to Z \to \Sigma X \quad \mapsto \quad \cdots H(\Sigma^{-1}Z) \leftarrow H(X) \leftarrow H(Y) \leftarrow H(Z) \leftarrow H(\Sigma X)\cdots$$

- $\mathscr{T}^\alpha \subset \mathscr{T}$ subcategoría llena de objetos α-compactos para un cardinal regular α.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\forall"] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \coprod_I Y_i \\
& \coprod_J X_i \arrow[r] & \coprod_J Y_i \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{card}(J) < \alpha$, X_i α-compacto

Resumen

1. Motivaciones
2. Resultados
3. Teoría de obstrucción

Resumen

Definimos una teoría de obstrucción para la representabilidad de objetos y morfismos en la sucategoría $\mathsf{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \subset \mathsf{Mod}(\mathscr{T}^\alpha)$ con objetos

$$\begin{array}{rcl} \{\mathscr{T}^\alpha\}^{\mathsf{op}} & \longrightarrow & \mathsf{Ab} \\ \coprod_{<\alpha} & \longmapsto & \prod \end{array}$$

- Functor de Yoneda restringido $\begin{array}{rrcl} \mathsf{S}_\alpha\colon & \mathscr{T} & \longrightarrow & \mathsf{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \\ & X & \longmapsto & \mathscr{T}(-,X)|_{\mathscr{T}^\alpha} \end{array}$
- AObj_α $\Leftrightarrow$ Functores cohomológicos en $\mathsf{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \subset \mathsf{Im}(\mathsf{S}_\alpha)$
- AMor_α $\Leftrightarrow$ S_α es lleno (sobreyectivo en morfismos)

$\mathscr{T}$ una categoría triangulada y α un cardinal regular.

- Generada por un conjunto de objetos S:

$$\boxed{\mathscr{T}(s, X) = 0 \ \forall s \in S} \Rightarrow \boxed{X = 0}$$

- α-compactamente generada: Tiene coproductos y está generada por un conjunto de objetos α-compactos.
- Bien generada: α-compactamente generada para algun α.

Ejemplos

1. $\mathcal{S} = \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$ está generada por $\mathcal{S}^f = \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})^{\aleph_0}$.
2. $\mathcal{M}$ categoría de modelos combinatoria estable $\Rightarrow \mathrm{Ho}(\mathcal{M})$ bien generada [Rosický 2005].
3. $\mathrm{D}(R)$ está generada por los complejos acotados de R-módulos proyectivos finitamente generados $\mathrm{D}(R)^{\aleph_0}$.
4. $\mathcal{A}$ categoría de Grothendieck $\Rightarrow \mathrm{D}(\mathcal{A})$ bien generada [Alonso, Jeremías y Souto 2000].
5. $\mathcal{D} \subset \mathscr{T}$ subcategoría localizante de una categoría bien generada $\Rightarrow \mathscr{T}/\mathcal{D}$ bien generada [Teorema de localización de Thomason, Neeman 2001].

Teorema [Neeman 1997]

$\mathscr{T}$ $\aleph_0$-compact. generada
card $\mathscr{T}^{\aleph_0} \leq \aleph_0$ $\Rightarrow$ $\mathscr{T}$ satisface $\mathrm{AObj}_{\aleph_0}$ y $\mathrm{AMor}_{\aleph_0}$

Teorema [Christensen, Keller y Neeman 2001]

$\mathrm{D}(k[X,Y])$ no satisface $\mathrm{AMor}_{\aleph_0}$ ni $\mathrm{AObj}_{\aleph_0}$ si card $k \geq \aleph_3$

$\mathrm{D}(\mathbb{C}\langle X,Y\rangle)$ satisface $\mathrm{AMor}_{\aleph_0}$ $\Leftrightarrow$ Hipótesis del continuo

Teorema [Neeman 2001]

$\mathscr{T}$ bien generada $\Rightarrow$ $\mathscr{T} = \bigcup_\alpha \mathscr{T}^\alpha$ y
$\mathscr{T}$ satisface la respresentabilidad de Brown

$\mathscr{T}$ bien gen. $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\mathscr{T}$ satisface AObj_α y AMor_α para α suficientemente grande

Teorema [Neeman 2009]

$\mathscr{T}$ sat. AObj_α y AMor_α $\Rightarrow$ $\mathscr{T}$ y $\mathscr{T}^{\mathrm{op}}$ satisfacen la rep. de Brown

$\mathscr{T}$ bien generada $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\mathscr{T}^{\mathrm{op}}$ satisface la representabilidad de Brown

Teorema [M. y R.]

$$
\begin{array}{ccc}
\boxed{\mathsf{AObj}_\alpha} & \Leftarrow & \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{pd}(H) \leq 2 \text{ en } \mathrm{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \\ \forall H \text{ cohomológico} \end{array}} \\
\Uparrow & & \Uparrow \\
\boxed{\mathsf{AObj}_\alpha \text{ y } \mathsf{AMor}_\alpha} & \Leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{pd}(H) \leq 1 \text{ en } \mathrm{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \\ \forall H \text{ cohomológico} \end{array}} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\boxed{\mathsf{AMor}_\alpha} & \Leftrightarrow & \boxed{\begin{array}{c} \mathrm{pd}\big(\mathscr{T}(-,X)_{|\mathscr{T}^\alpha}\big) \leq 1 \\ \text{en } \mathrm{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \ \forall X \text{ en } \mathscr{T} \end{array}}
\end{array}
$$

Teorema [M. y R.]

$$
\boxed{\begin{array}{c} \alpha \leq \aleph_n \\ \mathrm{card}\,\mathscr{T}^\alpha \leq \aleph_n \end{array}} \Rightarrow \boxed{\sup\{\mathrm{pd}(F) \mid F \text{ cohomológico en } \mathrm{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha)\} \leq n+1}
$$

Corolario

$\mathscr{T}$ α-compactamente generada con $\alpha = \aleph_0$ o $\aleph_1$ y card$\mathscr{T}^\alpha \leq \aleph_1$	$\Rightarrow$	$\mathscr{T}$ satisface AObj_α
$\mathscr{T}$ es $\aleph_0$-compactamente gen. card$\mathscr{T}^{\aleph_0} \leq \aleph_0$	$\Rightarrow$	$\mathscr{T}$ sat. $\mathsf{AObj}_{\aleph_0}$ y $\mathsf{AMor}_{\aleph_0}$ [Christensen, Keller y Neeman]

Ejemplos que satisfacen $\mathsf{AObj}_{\aleph_1}$ asumiendo la Hipótesis del continuo

1. La categoría de homotopía estable $\mathcal{S} = \mathrm{Ho}(\mathrm{Sp})$.
2. La categoría derivada $\mathrm{D}(R)$ de un anillo R con card$R \leq \aleph_1$.
3. La categoría homotópica de complejos de R-módulos inyectivos $\mathrm{K}(R\text{-Inj})$ con R noetheriano y card$R \leq \aleph_1$.
4. La caetegoría homotópica de complejos de R-módulos proyectivos $\mathrm{K}(R\text{-Proj})$ con card$R \leq \aleph_1$.
5. La categoría derivada de haces sobre una variedad conexa paracompacta $\mathrm{D}(Sh/M)$.
6. La categoría motívica estable $\mathcal{SH}(S)$, con $S = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}(R_i)$ un esquema noetheriano de dimensión de Krull finita y card$R_i \leq \aleph_1$ par todo $i \in I$.

Teorema [M. y R.]

- R un anillo α-coherente y $\alpha > \aleph_0$.

  $\boxed{\mathrm{D}(R) \text{ satisface } \mathrm{AMor}_\alpha} \Rightarrow \boxed{\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) \leq 1}$

- R un anillo hereditario.

  $\boxed{\mathrm{D}(R) \text{ satisface } \mathrm{AObj}_\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) \leq 2}$

  $\boxed{\mathrm{D}(R) \text{ satisface } \mathrm{AMor}_\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) \leq 1}$

- α-coherente: R-módulos con $< \alpha$ generadores tienen $< \alpha$ relaciones.
- Hereditario: Dimensión proyectiva global ≤ 1.
- Dimensión global α-pura: $\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) \leq n$ si para todo R-module M, existe una sucesión exacta

$$0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to M \to 0$$

  donde cada P_i es un restracto de una suma directa de R-módulos con $< \alpha$ generadores y $< \alpha$ relaciones y

$$0 \to \hom_R(Q, P_n) \to \cdots \to \hom_R(Q, P_1) \to \hom_R(Q, M) \to 0$$

  es exacta para todo R-módulo Q con $< \alpha$ generadores y $< \alpha$ relaciones.

R α-coherente y $\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) > 1$ $\Rightarrow$ $\mathrm{D}(R)$ no satisface AMor_α

R hereditario, $\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) > 2$ y $\alpha > \aleph_0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{D}(R)$ no satisface AObj_α

Cálculos conocidos de cotas inferiores de la dimensión proyectiva α-pura:

1. $\alpha = \aleph_0$, [Baer y Lenzing 1982]
2. $R = \mathbb{Z}$ y sólo $\mathrm{Pgldim}_\alpha(R) > 1$, [Braun y Göbel 2012]
3. Otros casos, [Bazzoni y Šťovíček 2013 y comunicación personal]

Corolario

AMor_α no se satisface para los anillos R y cardinales α siguientes:

1. $R = \mathbb{Z}$ y $\alpha > \aleph_0$.
2. $R = k[x, y]$
   - para k un cuerpo no numerable y α cualquiera.
   - para k un cuerpo numerable y $\alpha > \aleph_0$.

AObj_α no se satisface para los anillos R y cardinales α siguientes:

- $R = \mathbb{Z}$ y $\alpha > \aleph_1$.
- R álgebra de caminos para el grafo de Kronecker sobre un cuerpo no numerable y $\alpha > \aleph_1$.

Definición (a partir del caso $\alpha = \aleph_0$ [Benson, Krause y Schwede 2004])

Un sistema de Postnikov *n-truncado* $(X_{\leq n}, P_*)$, es un diagrama en $\mathscr{T}$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "i_0"] & & X_0 \arrow[dl, "q_0", "+1"'] \arrow[rr, "i_1"] & & X_1 \arrow[dl, "q_1", "+1"'] & \cdots\cdots & X_{n-1} \arrow[rr, "i_n"] & & X_n \arrow[dl, "q_n", "+1"'] & & \\
& P_0 \arrow[ul, "f_0"] & & P_1 \arrow[ul, "f_1"] & & & & P_n \arrow[ul, "f_n"] & & P_{n+1} \arrow[ul, "f_{n+1}"'] & P_{n+2} \cdots \arrow[l, "d_{n+2}"', "+1"]
\end{tikzcd}
$$

- los triangulos son exactos
- $f_{n+1} d_{n+2} = 0$ (condición de cociclo)
- el functor de Yoneda restringido $S_\alpha(X) = \mathscr{T}(-, X)_{|\mathscr{T}^\alpha}$ envía

$$
P_0 \xleftarrow[+1]{q_0 f_1} P_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow P_n \xleftarrow[+1]{q_n f_{n+1}} P_{n+1} \xleftarrow[+1]{d_{n+2}} P_{n+2} \longleftarrow \cdots
$$

a una sucesión exacta larga de objetos proyectivos.

- **$\mathbf{Post_n}$** la categoría de sistemas de Postnikov n-truncados.
- **$\mathbf{Post_n^{\simeq}}$** la cat. de sistemas de Postnikov n-truncados salvo homotopía.

$(\psi_{\leq n}, \varphi_*) \simeq (\bar{\psi}_{\leq n}, \bar{\varphi}_*) \Leftrightarrow \psi_k - \bar{\psi}_k$ factoriza vía $f_{k+1} \colon P_{k+1} \to X_k$, $0 \leq k \leq n$

- Resolución de Postnikov:$(\operatorname{Hocolim}_n X_n, X_*, P_*)$ con $(X_*, P_*) \in \lim_n \mathrm{Post}_n^{\simeq}$.
- **$\mathbf{Pres_\infty^{\simeq}}$** la categoría de resoluciones de Postnikov.

Teorema [M. y R.]

- Existe una sucesión de sucesiones exactas de categorías, $n \geq 0$,

$$\begin{tikzcd} & & \mathrm{Ext}^{n+3,-1-n}_{\alpha,\mathscr{T}} & \\ \mathrm{Ext}^{n+1,-1-n}_{\alpha,\mathscr{T}} \arrow[r, "\imath_n"] & \mathrm{Post}^{\simeq}_{n+1} \arrow[r, "\text{trunc.}"] & \mathrm{Post}^{\simeq}_{n} \arrow[u, "\kappa_n"'] \arrow[r, "\theta_n"] & \mathrm{Ext}^{n+2,-1-n}_{\alpha,\mathscr{T}} \end{tikzcd}$$

- Existe un functor esencialmente único

$$\Psi\colon \mathscr{T} \longrightarrow \mathrm{Pres}^{\simeq}_{\infty}$$

  - aditivo, lleno y esencialmente sobreyectivo
  - $\ker \Psi$ coincide con el ideal $\mathscr{I}^{\infty}$ de los morfismos ∞-fantasma
  - $\mathscr{I}^{\infty}$ es un ideal con cuadrado zero
  - El functor de Yoneda restringido $S_\alpha(X) = \mathscr{T}(-,X)|_{\mathscr{T}^\alpha}$ factoriza

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{T} & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Pres}^{\simeq}_{\infty} & \longrightarrow & \mathrm{Post}^{\simeq}_{0} \simeq \mathrm{Mod}_\alpha(\mathscr{T}^\alpha) \\ X & \longmapsto & (\mathrm{Hocolim}_n X_n, X_*, P_*) & \longmapsto & H_* S_\alpha(P_*) \end{array}$$

- $\kappa_n(X_{\leq n}, P_*) \in \mathrm{Ext}^{n+3,-1-n}_{\alpha,\mathscr{T}}(H_0 S_\alpha(P_*), H_0 S_\alpha(P_*))$: Obstrucción a extender un sistema de Postnikov n-truncado $(X_{\leq n}, P_*)$ a uno $(n+1)$-truncado.
- $\theta_n(\psi_{\leq n}, \varphi_*) \in \mathrm{Ext}^{n+2,-1-n}_{\alpha,\mathscr{T}}(H_0 S_\alpha(P_*), H_0 S_\alpha(Q_*))$: Obstrucción a extender un morfismo n-truncado $(\psi_{\leq n}, \varphi_*)$ entre sistemas de Postnikov $(n+1)$-truncados a uno $(n+1)$-truncado.